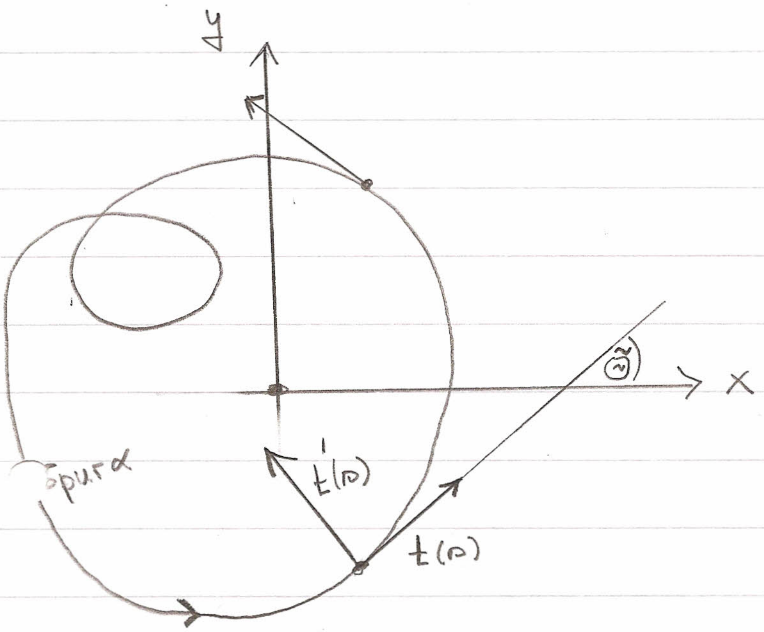
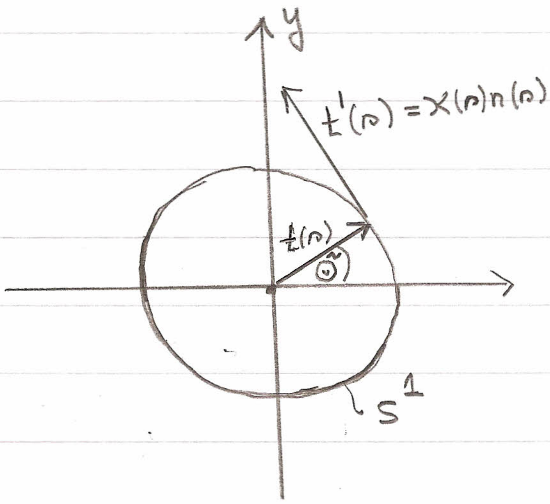
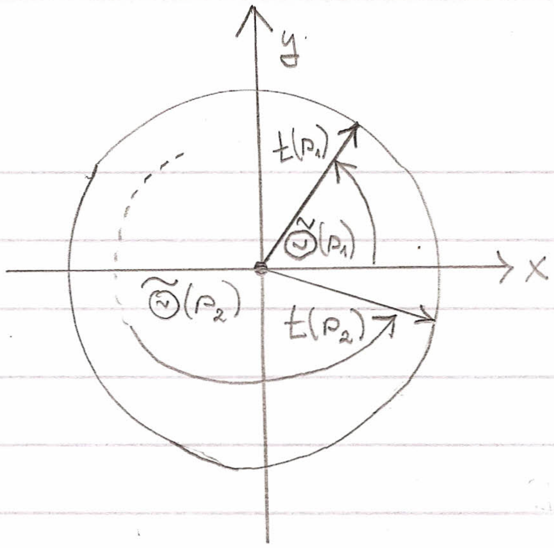
Vorzeichen versehen) nennt man den Rotationsindex von α.





Sei $\tilde{\theta}(s) \in [0, 2\pi)$ der eindeutig bestimmte Winkel zwischen dem Tangentenvektor $t(s)$ und der <u>positiven</u> x-Achse gemessen <u>gegen den Uhrzeigersinn</u>. (*) s.u. Die Funktion $\tilde{\theta}$ ist i.a. unstetig, denn ist $\tilde{\theta}(s_0) = 0$ und dreht sich t gegen den Uhrzeigersinn, so hat man für $s > s_0$ nahe s_0 sehr kleine $\tilde{\theta}$-Werte, wogegen für $s = s_0 - \varepsilon$ nahezu der Wert 2π vorliegt.

(*): $\tilde{\theta}(s)$ ist der orientierte Winkel, der angibt, wie weit man die positive x-Achse gegen den Uhrzeigersinn drehen muss, damit man $t(s)$ bekommt.



Das unangenehme Verhalten von $\tilde{\vartheta}$ wird "beseitigt" durch

<u>Lemma:</u> Es gibt eine <u>stetige</u> Funktion $\vartheta : [0, L] \to \mathbb{R}$

mit $(*)$ $$\boxed{\vartheta(s) \equiv \tilde{\vartheta}(s) \mod (2\pi).}$$

Die Funktion $\vartheta(s)$ erfüllt gemäß $(*)$ also die Beziehung

$$\frac{1}{2\pi}\left[\vartheta(s) - \tilde{\vartheta}(s)\right] \in \mathbb{Z} .$$

Beweis: Die Tangentenabbildung $t : [0, L] \to S^1$ ist auf dem kompakten Intervall $[0, L]$ gleichmäßig stetig, zu $\varepsilon > 0$ gibt es daher $\delta > 0$ mit

$$|s_1 - s_2| < \delta \implies |t(s_1) - t(s_2)| < \varepsilon .$$

Speziell kann man für $\varepsilon > 0$ klein genug erreichen, dass $t(s_1), t(s_2)$ im Fall $|s_1 - s_2| < \delta$

in einer offenen Halbebene liegen. Man zerlegt $[0,L]$ in der Form

$$0 = s_0 < s_1 < \dots < s_\ell = L$$

mit Teilpunkten s_j, für die $s_j - s_{j-1} < \delta$ gilt.

Wir definieren Θ stetig und mit $(*)$ zunächst auf $[s_0, s_1]$, danach wiederholt man diesen Prozess induktiv und hat die Aussage des Lemmas.

Fall 1: $\tilde{\Theta}(s_0) = 0$ $(\Rightarrow t(s_0) = (1,0))$ (kritische Lage!)

Dann sei für $s \in [s_0, s_1]$

$$\Theta(s) := \begin{cases} \tilde{\Theta}(s), & \text{falls } y\text{-Koordinate von } t(s) \geq 0 \\ \tilde{\Theta}(s) - 2\pi, & \text{-- '' --} \quad < 0 \end{cases}$$

Fall 2: $\tilde{\Theta}(s_0) \in (0, 2\pi)$

Für ε passend ist dann $\tilde{\Theta}(s) > 0$ auf $[s_0, s_1]$ und man kann $\Theta := \tilde{\Theta}$ auf $[s_0, s_1]$ definieren.

Nun argumentiere man entsprechend auf $[s_1, s_2]$, usw. $\square$

Insbesondere ist

$$I := \frac{1}{2\pi}\left[\Theta(L) - \Theta(0)\right] \in \mathbb{Z}.$$

Es handelt sich bei dieser ganzen Zahl um eine <u>Invariante</u>, die nicht von der speziellen Hilfsfunktion Θ des Lemmas abhängt: Ist Θ^* eine zweite Funktion (also stetig und mit $\circledast$), so gilt

$$\Theta^*(s) - \Theta(s) = \Theta^*(s) - \tilde{\Theta}(s) - \left(\Theta(s) - \tilde{\Theta}(s)\right) =$$

$$2\pi\left(n^*(s) + n(s)\right) =: 2\pi\, m(s)$$

mit Funktionen $n, n^* : [0, L] \to \mathbb{Z}$. Die Funktion $\Theta^* - \Theta$ ist stetig, das geht aber nur, wenn $m(s) \equiv m$ für ein $m \in \mathbb{Z}$ ist. Es folgt:

$$\Theta^* = \Theta + 2\pi\, m,$$ also

$$\Theta^*(L) - \Theta^*(0) = \Theta(L) - \Theta(0).$$

Das rechtfertigt

<u>Definition:</u> Es sei $\alpha : [0,L] \to \mathbb{R}^2$ eine geschlossene, nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve. Ist θ wie im Lemma, so heißt

$$I_\alpha := \frac{1}{2\pi}\left[\theta(L) - \theta(0)\right] \in \mathbb{Z}$$

der <u>Rotationsindex der Kurve α.</u>

Zum Beweis der Existenz der Funktion θ wurde lediglich benutzt, dass die Tangentenabbildung $t(s)$ stetig ist mit $t(0) = t(L)$. Wegen $\circledast$ aus dem Lemma und gemäß der Definition von $\tilde{\theta}(s)$ gilt

$$t(s) = (\cos\theta(s), \sin\theta(s)),$$

$$n(s) = (-\sin\theta(s), \cos\theta(s))$$

also $\quad t'(s) = \theta'(s)\, n(s),\quad$ d.h. nach Definition der Krümmung

$$\varkappa(s) = \Theta'(s).$$

Wir erhalten daraus die

<u>Integraldarstellung des Rotationsindex von α</u> : $\boxed{2\pi\, I_\alpha = \Theta(L) - \Theta(0) = \int_0^L \varkappa(s)\, ds}$

Hier steht, dass $\frac{1}{2\pi} \int_0^L \varkappa(s)\, ds$ eine ganze Zahl ist, was apriori nicht klar ist. Viele Autoren benutzen die Gleichung auch zur Definition von I_α. Als Anwendung der Begriffsbildung beweisen wir den berühmten

<u>Theorem:</u> "<u>Umlaufsatz</u>"

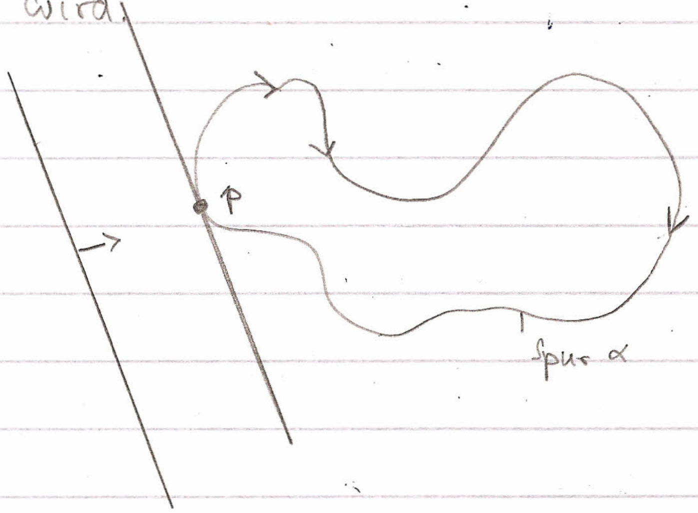
Sei $\alpha : [0, L] \to \mathbb{R}^2$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte, <u>einfach</u> geschlossene Kurve (, d.h. $\alpha|_{[0,L)}$ ist injektiv). Dann gilt:

Rotationsindex $I_\alpha \in \{+1, -1\}$.

< Übung: berechne I_α für verschiedene α >

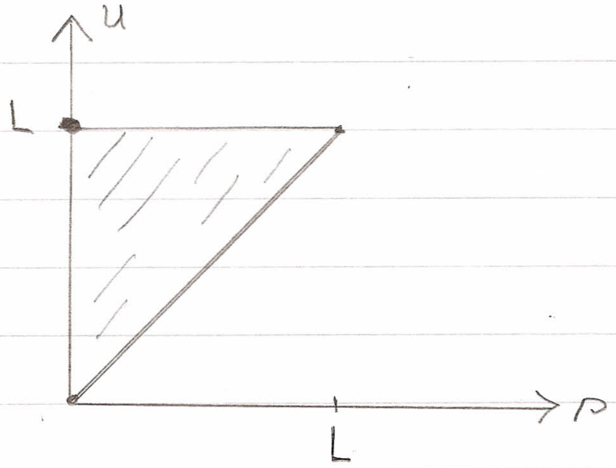
Beweis (nach Heinz Hopf, 1935):

Anschaulich ist klar, dass es einen Punkt $p \in$ Spur α gibt, so dass Spur α ganz auf einer Seite der Tangente in p liegt. Dazu nehme man eine Gerade, die Spur α nicht trifft (existiert, da Spur α kompakt) und verschiebe diese solange parallel bis sie zu einer Tangente wird:



O.E. kann man annehmen, dass $p = \alpha(0) = \alpha(L)$ ist, sonst parametrisiere man um, was den Index nicht ändert.

Auf dem Dreieck $\Delta_L := \{(s,u) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq s \leq u \leq L\}$



betrachtet man die Sehnenabbildung

$$\sigma(s,u) := \begin{cases} \dfrac{\alpha(u)-\alpha(s)}{|\alpha(u)-\alpha(s)|} & , s<u, \; u-s<L \\ \alpha'(s) & , s=u \\ -\alpha'(0) & , s=0, \; u=L \end{cases}$$

Da α einfach geschlossen ist, ist $\sigma(s,u)$ wohldefiniert, denn in der ersten Definitionszeile ist $s=0,\ u=L$ ($\Rightarrow \alpha(u)=\alpha(s)$) "verboten", nur für diese Wahl ist $\alpha(u)=\alpha(s)$. Außerdem ist σ stetig: Dazu ist zu prüfen:

1.) Ist $0 \le s_0 \le L$, so gilt

$$\lim_{\substack{(s,u)\to(s_0,s_0),\\ u>s}} \frac{\alpha(u)-\alpha(s)}{|\alpha(u)-\alpha(s)|} = \alpha'(s_0)$$

und

2.) $$\lim_{\substack{(s,u)\to(0,L)\\ u>s}} \frac{\alpha(u)-\alpha(s)}{|\alpha(u)-\alpha(s)|} = -\alpha'(0)$$

ad 1.) Für $s<u$, $u-s<L$ ist

$$\frac{\alpha(u)-\alpha(s)}{|\alpha(u)-\alpha(s)|} = \frac{\alpha(u)-\alpha(s)}{u-s}\cdot\left|\frac{\alpha(u)-\alpha(s)}{u-s}\right|^{-1},$$

$$\frac{\alpha(u)-\alpha(s)}{u-s} = \frac{1}{u-s}\int_0^1 \alpha(s+\rho(u-s))\,d\rho =$$

$$\int_0^1 \alpha'(s+\rho(u-s))\,d\rho \longrightarrow \alpha'(s_0),$$

falls $(s,u)\to(s_0,s_0)$, $s_0\geq 0$, $u>s$.

Also: $$\lim_{\dots} \frac{\alpha(u)-\alpha(s)}{|\alpha(u)-\alpha(s)|} = \frac{\alpha'(s_0)}{|\alpha'(s_0)|} = \alpha'(s_0)$$

wegen $|\alpha'(s_0)|=1$.

ad 2.) Seien $s<u$, $u-s<L$. Es gilt $\alpha(s)=$

$\alpha(s+L)$ (α L-periodisch fortgesetzt), also

$$\frac{\alpha(u)-\alpha(s)}{|\alpha(u)-\alpha(s)|} = \frac{\alpha(u)-\alpha(s+L)}{u-(s+L)}\;\frac{u-(s+L)}{|\alpha(u)-\alpha(s+L)|}$$

mit $\quad \big(\alpha(u) - \alpha(s+L)\big) \big/ \big(u-(s+L)\big) \longrightarrow \alpha'(L)$

bei $u \to L$, $s \to 0$, $u > s$. (s.o.) Gemäß

$u-(s+L) < 0$ gilt dann bei diesem Grenzübergang

$$u-(s+L) \big/ \left|\alpha(u) - \alpha(s+L)\right| \longrightarrow -1/|\alpha'(L)| ,$$

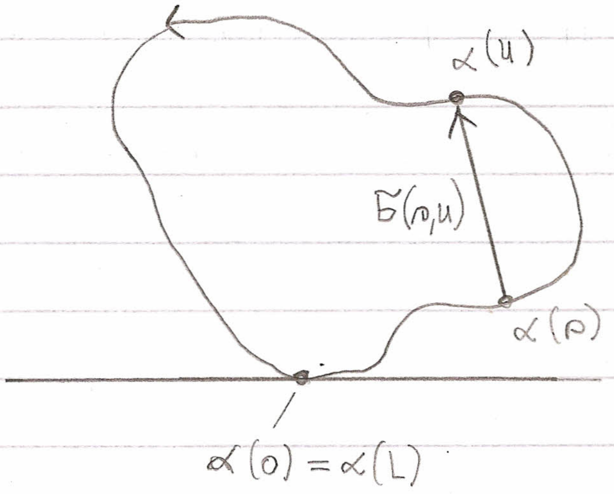
was wegen $|\alpha'| = 1$ und $\alpha'(0) = \alpha'(L)$ die Aussage 2.) ergibt.

<u>Die weitere Vorgehensweise zur Berechnung von I_α sieht so aus:</u>

- I_α wird vom Tangentialfeld t_α bestimmt und wie nach der Definition des Rotationsindex vermerkt, können wir für jede stetige Kurve $T: [0,L] \to S^1$ eine Zahl $I_T \in \mathbb{Z}$ definieren sofern $T(0) = T(L)$ ist. (Man mache einfach die Konstruktion nach!) Speziell ist $I_\alpha = I_{t_\alpha}$.
- Ist $T_\rho : [0,L] \to S^1$, $0 \leq \rho \leq 1$, eine Familie geschlossener Kurven, die stetig von ρ abhängt, so ist $\rho \mapsto I_{T_\rho}$ stetig, also $\equiv$ const, da

$\mathbb{Z}$ - wertig.

- Man suche eine Schar T_ρ, so dass $T_0 = t \; (= t_\alpha)$ ist, und gleichzeitig T_1 eine <u>so einfache Gestalt</u> hat, dass man I_{T_1} <u>ausrechnen kann</u>.



(Skizze der Sehnenabbildung, falls $|\tilde{\sigma}(u) - \tilde{\sigma}(\rho)| = 1$)

Um diese Schritte auszuführen, sei

$$\mathcal{S}_u(\rho) := \begin{cases} L \cdot \big((1-u)\rho, (1+u)\rho\big), & 0 \le \rho \le 1/2 \\ L \cdot \big((1+u)\rho - u, (1-u)\rho + u\big), & \frac{1}{2} \le \rho \le 1, \end{cases}$$

wobei $0 \le u \le 1$ als fixierter Parameter gedacht wird.

Es gilt: $\mathcal{S}_u$ hat Werte in Δ_L für jedes $u \in [0,1]$, $\mathcal{S}_u$ passt bei $\frac{1}{2}$ stetig zusammen